Préambule et notations préliminaires

Ce problème introduit les opérateurs de Dunkl de paramètre k dont on admet la commutativité. On étudie d'abord le cas $k = 0$, puis le rang 1 et enfin certaines propriétés remarquables en dimension n. On utilise ces opérateurs pour démontrer une formule de MacDonald sur l'intégrale de Mehta.

Les deux premières parties sont indépendantes. La troisième partie n'utilise que le I.2.

• On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels positifs ou nuls et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

• **Dans ce problème n est un entier supérieur ou égal à 2.** On note $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,,\cdot)$.

• On note $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n indéterminées à coefficients dans $\mathbf{R}$. Tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

où les a_α sont des réels nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Pour un polynôme P donné, **on note $\operatorname{supp}(P)$ l'ensemble des α tels que $a_\alpha \neq 0$**, avec la convention $\operatorname{supp}(0) = \emptyset$. Ainsi on peut écrire $P = \sum_{\alpha\in\operatorname{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.[1]

Si P est un polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, P désigne aussi, par abus de notation, la fonction polynomiale associée et on note $P(x)$ l'évaluation de P en $x \in \mathbf{R}^n$.

• Le monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ est de degré $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Un polynôme P non nul est dit homogène de degré d si P est combinaison linéaire non nulle de monômes de degré d. On note alors $\deg(P)$ ce degré.

On note Δ le polynôme $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (X_j - X_i)$; il est homogène de degré $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

• Si A et B sont deux opérateurs on note $A^2 = A \circ A$ et $[A, B]$ le commutateur $A \circ B - B \circ A$. On rappelle la formule $[A^2, B] = [A, B] \circ A + A \circ [A, B]$.

• On rappelle qu'il existe une action à gauche, linéaire et notée dans ce problème ρ, du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $P = \sum_{\alpha\in\operatorname{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$, cette action est définie par : $\rho(\sigma)(P) = \sum_{\alpha\in\operatorname{supp}(P)} a_\alpha X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$. On note aussi pour simplifier ${}^\sigma P = \rho(\sigma)(P)$.

On dit que P est **symétrique** si on a ${}^\sigma P = P$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

[1] Par convention, une somme indexée par l'ensemble vide est nulle.

I Le cas classique

1. Soit $P = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. On note pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\theta_{i,j}$ la transposition (i, j). Calculer
$$\frac{P - {}^{\theta_{i,j}}P}{X_i - X_j}.$$

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et pour toute transposition $\theta_{i,j}$ (avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$), $P - {}^{\theta_{i,j}}P$ est divisible par $X_i - X_j$.

On dira qu'un polynôme P est **antisymétrique** si, pour toute transposition $\theta \in \mathfrak{S}_n$, on a ${}^{\theta}P = -P$.

3. Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On note $\epsilon(\sigma)$ sa signature. Montrer que tout polynôme P antisymétrique vérifie ${}^{\sigma}P = \epsilon(\sigma)P$.

4. Montrer que le polynôme $\Delta = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$ est antisymétrique.

5. Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme antisymétrique. Montrer qu'il est divisible par Δ dans l'anneau $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Pour P polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, on note $P(\partial)$ l'opérateur différentiel obtenu en substituant aux symboles X_i les opérateurs différentiels $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$. Cette substitution est possible car, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ commutent deux à deux. Si P s'écrit $\sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, on a donc : $P(\partial) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \cdot Q$ leur produit et on vérifie facilement (mais on ne demande pas de le faire) que l'on a l'égalité d'opérateurs
$$(P \cdot Q)(\partial) = P(\partial) \circ Q(\partial).$$

On définit une forme bilinéaire sur $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et donnée pour P et Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ par : $\langle P, Q \rangle = P(\partial)(Q)(0, \dots, 0)$ (on évalue en 0 le polynôme $P(\partial)(Q)$).

6. Soient P et Q deux polynômes homogènes non nuls avec $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Montrer que l'on a $\langle P, Q \rangle = 0$.

7. Pour P, Q, R polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, montrer que l'on a
$$\langle P \cdot Q, R \rangle = \langle Q, P(\partial)(R) \rangle.$$

8. Montrer que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ détermine un produit scalaire défini positif sur $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ (*on pourra travailler dans une base adaptée*).

9. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, montrer que l'on a
$$\langle {}^\sigma P, {}^\sigma Q \rangle = \langle P, Q \rangle.$$

10. Montrer que l'on a $\langle \Delta, \Delta \rangle = \Delta(\partial)(\Delta) = 1!2!\dots n!$
(on pourra utiliser le développement du déterminant de Vandermonde
$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix},$$
dont on admettra par ailleurs l'expression factorisée).

II Opérateur de Dunkl en rang 1

Dans cette partie, k désigne un **paramètre réel strictement positif**.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, on définit la fonction $T(f)$ pour $x \neq 0$ par :
$$T(f)(x) = f'(x) + k\frac{f(x) - f(-x)}{x}$$
(on a noté f' la dérivée de la fonction f).

1. En utilisant la formule $\dfrac{f(x) - f(-x)}{x} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(xt)\,\mathrm{d}t$, montrer que $T(f)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. On la note encore $T(f)$.

2. Pour m entier positif ou nul, calculer $T(p_m)$ où p_m est la fonction polynomiale définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $p_m(x) = x^m$.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, on définit la fonction $V_k(f)$ pour $x \in \mathbf{R}$ par :
$$V_k(f)(x) = b_k \int_{-1}^{1} f(xt)(1-t)^{k-1}(1+t)^k\,\mathrm{d}t$$
avec b_k un réel choisi de telle sorte que l'on ait $V_k(1) = 1$. La fonction $V_k(f)$ est clairement dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ (on ne demande pas de le vérifier et on ne cherchera pas à expliciter b_k).

3. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, montrer que l'on a $T\big(V_k(f)\big) = V_k(f')$.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note e_λ la fonction exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. On pose $E_\lambda = V_k(e_\lambda)$ et J_λ la fonction définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $J_\lambda(x) = \dfrac{E_\lambda(x) + E_\lambda(-x)}{2}$.

4. Déduire de ce qui précède que l'on a $T(E_\lambda) = \lambda E_\lambda$.

5. On suppose $\lambda \neq 0$. Montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}J_\lambda}{\mathrm{d}x}(x)\cdot$$

6. Montrer que J_λ vérifie l'équation différentielle $xy''(x) + 2ky'(x) = \lambda^2 xy(x)$.

III Opérateur de Dunkl en dimension n

Cette partie utilise les notations préliminaires et la question I.2.

Dorénavant k désigne **un paramètre réel**. On note R^+ le sous-ensemble fini de $\mathbf{R}^n$ défini par $R^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Pour $\beta = e_i - e_j \in R^+$ (avec $i < j$), on note abusivement $X_\beta = X_i - X_j$ et on écrit θ_β ou $\theta_{i,j}$ la transposition (i, j) du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. D'après la question I.2, on peut définir une application linéaire Δ_β de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ donnée pour $Q \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par :

$$\Delta_\beta(Q) = \frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}\cdot$$

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on introduit l'opérateur de Dunkl d'indice ℓ, noté $T_\ell(k)$ (on notera aussi T_ℓ s'il n'y a pas de confusion possible), défini pour tout polynôme $Q \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par :

$$T_\ell(k)(Q) = \frac{\partial Q}{\partial X_\ell} + k \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (e_\ell, e_i - e_j)\frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{\partial Q}{\partial X_\ell} + k\sum_{\beta\in R^+}(e_\ell, \beta)\Delta_\beta(Q)$$

(on rappelle que $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$).

1. Soit Q un polynôme homogène non nul. Montrer que pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, le polynôme $T_\ell(k)(Q)$ est nul ou homogène de degré $\deg(Q) - 1$.

2. Montrer que l'on a, pour tout polynôme Q, tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$,

$${}^{\sigma}\Big(T_\ell(k)(Q)\Big) = T_{\sigma(\ell)}(k)({}^{\sigma}Q).$$

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on note M_ℓ l'opérateur de multiplication par X_ℓ. Pour tout $Q \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on a donc

$$M_\ell(Q) = X_\ell \cdot Q.$$

On définit l'opérateur $D(k)$ par $D(k) = \sum_{\ell=1}^{n} T_\ell(k)^2$.

3. Pour P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\beta \in R^+$ montrer que l'on a

$$\Delta_\beta(P \cdot Q) = P \cdot \Delta_\beta(Q) + \Delta_\beta(P) \cdot \left({}^{\theta_\beta}Q\right)$$

(on rappelle que l'on a noté $P \cdot Q$ le produit de P et Q).

4. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leqslant i,j \leqslant n$, l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, l'égalité

$$[T_j(k), M_i] = (e_i, e_j)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (\beta, e_i)(\beta, e_j)\rho(\theta_\beta)$$

(on rappelle que le membre de gauche est le commutateur, $\rho(\theta_\beta)$ désigne l'action de la transposition θ_β dans $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ et Id désigne l'application identique de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$).

5. Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$, déduire des questions précédentes que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, l'égalité

$$[D(k), M_\ell] = 2\,T_\ell(k)$$

(*on pourra utiliser la formule du préambule sur le commutateur*).

IV Produit scalaire de Dunkl et Intégrale de Mehta

Cette partie utilise les notations et les résultats de la partie III.

On admet dans ce problème la propriété de commutativité suivante : pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on a $T_i(k) \circ T_j(k) = T_j(k) \circ T_i(k)$.

On note $P\big(T(k)\big)$ (ou simplement $P(T)$ s'il n'y a pas de confusion possible) l'opérateur obtenu en remplaçant dans P les symboles X_i par les opérateurs $T_i(k)$. Cette substitution est possible car, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les opérateurs $T_i(k)$ commutent deux à deux.
Si P s'écrit $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, on a donc $P(T) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(P)} a_\alpha T_1(k)^{\alpha_1} \circ \cdots \circ T_n(k)^{\alpha_n}$.
On définit sur $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ une forme bilinéaire (on ne demande pas de le vérifier) notée $\langle \cdot,\cdot \rangle_k$ et donnée pour $P, Q \in \mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ par : $\langle P, Q \rangle_k = P(T)(Q)(0,\ldots,0)$ (on évalue en 0 le polynôme $P(T)(Q)$).

Dans les questions qui suivent, ℓ désigne un entier tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$.

1. Soient P et Q deux polynômes homogènes non nuls avec $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
Montrer que l'on a $\langle P, Q \rangle_k = 0$.

2. Pour P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, montrer que l'on a $\langle M_\ell(P), Q \rangle_k = \langle P, T_\ell(k)(Q) \rangle_k$ (on rappelle que M_ℓ désigne l'opérateur de multiplication par X_ℓ).

3. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$, montrer que l'on a

$$\langle {}^\sigma P, {}^\sigma Q \rangle_k = \langle P, Q \rangle_k.$$

4. Montrer que $\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$, l'exponentielle de l'opérateur $-\dfrac{D(k)}{2}$ (avec $D(k)$ introduit dans la partie précédente), est bien définie comme opérateur de $\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$.

5. Montrer que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, l'égalité

$$[M_\ell, \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}] = T_\ell \circ \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$$

(*on pourra utiliser III.5*).

Dans la suite du problème, par abus de notation, on identifie fonctions polynomiales et polynômes.

6. Montrer que les formules données dans le préambule de la partie III permettent de prolonger les opérateurs $T_\ell(k)$ en des opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$
(*on pourra utiliser un argument semblable à celui développé à la question II.1*).

On note ψ la fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ définie pour $x \in \mathbf{R}^n$ par $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}$. On note M_ψ l'opérateur de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ de multiplication par ψ. Alors M_ψ^{-1} est l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{(x,x)}{2}}$. On prolonge naturellement les opérateurs M_ℓ à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ par la formule $M_\ell(f)(x) = x_\ell f(x)$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

7. Montrer que l'on a, entre opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, l'égalité

$$T_\ell \circ M_\psi = M_\psi \circ T_\ell - M_\psi \circ M_\ell.$$

8. En déduire que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales est stable par l'opérateur $M_\psi^{-1} \circ T_\ell \circ M_\psi \circ \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}$.

9. Conclure que l'on a, entre opérateurs de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, l'égalité

$$M_\psi^{-1} \circ T_\ell \circ M_\psi \circ \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}} = -\mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}} \circ M_\ell.$$

10. Soit P un polynôme non nul et homogène. Déduire de la question précédente que l'on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$P(T)(\psi)(x) = (-1)^{\deg(P)}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x).$$

11. En déduire que l'on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\Delta(T)(\psi)(x) = (-1)^{\deg(\Delta)} \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\, \Delta(x).$$

(on rappelle que Δ est le polynôme $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$).

Pour $\boldsymbol{k}$ **réel strictement positif** on définit la fonction continue w_k pour $x \in \mathbf{R}^n$ par :

$$w_k(x) = w_k(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i|^{2k}$$

et l'intégrale (clairement convergente) de Mehta-MacDonald par :

$$c_k = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i|^{2k} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}}\, w_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle la **définition de l'espace vectoriel de Schwartz** noté habituellement $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$: on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$ et on définit

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \Big\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \forall p \in \mathbf{N}, \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \exists C_{p,\alpha} > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n,$$
$$(1 + \|x\|^2)^p \Big|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\Big| \leqslant C_{p,\alpha}\Big\}.$$

12. Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l'une est dans l'espace de Schwartz et l'autre est une fonction polynomiale. Montrer en utilisant une intégration par parties, que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} T_\ell(k)(g)(x) f(x) w_k(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}^n} g(x) T_\ell(k)(f)(x) w_k(x) \, \mathrm{d}x.$$

Note : *on pourra admettre le résultat de cette question.*

13. Montrer que l'on a pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}} \, w_k(x) \, \mathrm{d}x = c_k P(0).$$

14. En déduire que l'on a pour $k > 0$ et P, Q polynômes de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\langle P, Q \rangle_k = \frac{1}{c_k} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x) \, \mathrm{e}^{-\frac{(x,x)}{2}} \, w_k(x) \, \mathrm{d}x.$$

15. Conclure que pour tout $k \in \mathbf{R}$ (non nécessairement positif) le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ est encore symétrique.

16. Montrer que l'on a pour tout $k > 0$, $c_{k+1} = c_k \cdot \langle \Delta, \Delta \rangle_k$.

Commentaire final : *On peut montrer que la fonction $\langle \Delta, \Delta \rangle_k$ est une fonction polynomiale en k de degré $\dfrac{n(n-1)}{2}$ vérifiant :*

$$\langle \Delta, \Delta \rangle_k = n! \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (ki + j).$$

En utilisant cette formule et le résultat de la dernière question on déduit l'égalité de fonctions méromorphes

$$c_k = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k\,i + 1)}{\Gamma(k+1)}$$

où Γ désigne la fonction classique Gamma.
